Fiche 1 - Espaces vectoriels, applications linéaires, matrices

Exercice 1. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

$$E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \leqslant y\}, \quad E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2+y^2+z^2 = 1\},$$
$$E_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2+y^2 \leqslant z^2\}, \quad E_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x-y+z = 0\}.$$

Exercice 2.

1. Les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$ sont-ils linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^3$? Sont-ils générateurs de $\mathbb{R}^3$?
2. Même question pour $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}$.
3. Même question pour $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}$, $\vec{r} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

Exercice 3. Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions infiniment dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et ω un nombre réel non nul.

1. On pose $\vec{u} = \cos(\omega x)$ et $\vec{v} = \sin(\omega x)$ comme fonctions de la variable réelle x. Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs de E linéairement indépendants.
2. Soit F_ω le sous-espace vectoriel de E formé par les solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$. Expliquer pourquoi $\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ est une base de F_ω .
3. On pose $\vec{w} = \cos(\omega x + a)$ et $\vec{r} = \sin(\omega x + a)$, où a est un réel fixé. Ecrire $\vec{w}$ et $\vec{r}$ dans la base $\mathcal{B}$ et montrer que $\mathcal{C} = \{\vec{w}, \vec{r}\}$ est une base de F_ω .
4. Exprimer la fonction $\cos(\omega x)$ dans la base $\mathcal{C}$.

Exercice 4. Dans $\mathbb{R}^2$, on considère les sous-ensembles

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x\} \text{ et } F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}.$$

Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ et que $E \oplus F = \mathbb{R}^2$.

Exercice 5. Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des applications dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit F le sous-ensemble de E des applications f qui vérifient $f(0) = f'(0) = 0$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Soit H l'ensemble des applications $x \mapsto ax+b$, où $a, b \in \mathbb{R}$. Vérifier que H est un sous-espace vectoriel de E et montrer que $F \oplus H = E$.

Exercice 6. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(\vec{e}_1) = 13\vec{e}_1 + 12\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3,\ f(\vec{e}_2) = -8\vec{e}_1 - 7\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3,\ f(\vec{e}_3) = -12\vec{e}_1 - 12\vec{e}_2 - 5\vec{e}_3,$$

où $B := \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Démontrer que $F_1 = \{u \in \mathbb{R}^3 : f(u) = u\}$ et $F_2 = \{u \in \mathbb{R}^3 : f(u) = -u\}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la dimension de chacun d'eux.
2. Montrer que F_1 et F_2 sont supplémentaires.

Exercice 7. Soit u l'application de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie, pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, par

$$u(x, y, z, t) = (x + y + z + t, y - t, x - 2z + 3t).$$

1. Montrer que u est linéaire.
2. Ecrire la matrice A de u relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base et la dimension du noyau de u.
4. En déduire le rang de u.

Exercice 8. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ (resp.$\mathbb{R}^3$) est muni de la base canonique $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ (resp. $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Ecrire les matrices des applications linéaires suivantes dans la base canonique convenable :

1. La rotation d'angle θ dans $\mathbb{R}^2$.
2. La rotation d'angle θ autour de Oz dans $\mathbb{R}^3$.
3. La réflexion par rapport à Ox dans $\mathbb{R}^2$.
4. La réflexion par rapport au plan xOy dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 9. Soit B (resp. D) la base canonique de $\mathbb{R}^4$ (resp. $\mathbb{R}^2$).

1. Soit $V = \mathbb{R}^4$, $W = \mathbb{R}^2$ et $L : V \to W$ l'application linéaire dont la matrice dans les bases B et D est :

$$L_{DB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

   Déterminer le noyeau $Ker(L)$ et l'image $Im(L)$ de L et en donner une base pour ces espaces.

2. Soit $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}^4$ et $L : V \to W$ donné par la matrice dans les bases B et D :

$$L_{DB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

   Déterminer $Ker(L)$ et $Im(L)$ et en donner une base pour ces espaces.

Exercice 10. On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[t]$ de la base $B = \{1, t, t^2, t^3\}$. Donner la matrice des endomorphismes $\frac{d}{dt}$ et $\frac{d^2}{dt^2}$ de $\mathbb{R}_3[t]$ dans la base B. Quelle relation y a-t-il entre ces deux matrices ?

Exercice 11. On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[t]$ de la base $B = \{1, t, t^2\}$. Donner la matrice de l'endomorphisme T_1 de $\mathbb{R}_2[t]$ dans la base B qui est défini par : $T_1(P) = P(t - 1)\ \forall P \in \mathbb{R}_2[t]$.

Exercice 12. On considère les matrices A, B, C, D définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $A + B$, AB, BA, AD, λA, $A - \lambda C$, où λ est un nombre réel quelconque.
2. Calculer $\det(A)$, $\det(B)$, $\det(AB)$, $\det(BA)$ et comparer.

Exercice 13. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$A(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\, x & \mathrm{sh}\, x \\ \mathrm{sh}\, x & \mathrm{ch}\, x \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $A(x)$ est inversible d'inverse $A(-x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer $A(x)^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 14. Soit

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire qui lui est canoniquement associée. Soit $\vec{u} = (1,1,1), \vec{v} = (0,1,0), \vec{w} = (1,0,0)$. Montrer que $\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de f dans cette nouvelle base.

Exercice 15. Soit $\mathcal{E} = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On considère les vecteurs $\vec{u} = (2,1)$ et $\vec{v} = (1,-1)$ donnés en composantes dans cette base.

1. Montrer de deux façons différentes que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants.
2. En déduire que $\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
3. Ecrire un vecteur quelconque $\vec{w} = (x, y)$ de $\mathbb{R}^2$ sous la forme $a\vec{u} + b\vec{v}$. En déduire les composantes $[\vec{w}]_{\mathcal{B}}$ du vecteur $\vec{w}$ dans la base $\mathcal{B}$.
4. Donner la matrice de passage $P = P_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$ ainsi que la matrice de passage inverse $P^{-1} = P_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$.
5. Vérifier que $PP^{-1} = P^{-1}P = I$ (donc les matrices $P_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$ et $P_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$ sont inverses l'une de l'autre) et que $\binom{x}{y} = P\binom{a}{b}$.

Exercice 16. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{E} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, on considère les vecteurs $\vec{u} = (1,1,0)$, $\vec{v} = (0,1,1)$ et $\vec{w} = (1,0,1)$.

1. Montrer que le système $\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner la matrice de passage $P = P_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$.
3. Donner la matrice de passage inverse $P^{-1} = P_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$ et vérifier que $PP^{-1} = P^{-1}P = I$.
4. Décomposer le vecteur $\vec{t} = (1,1,1)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 17. (*Calcul de A^n*) Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3 et soit $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ une base de E. Soit L l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base B est donnée par :

$$A = L_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $Ker(L)$ et $Im(L)$, sous-espaces de E et en donner une base. Quel est le rang de L ?
2. On note $\vec{\epsilon}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{\epsilon}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_3, \vec{\epsilon}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$. Montrer que $B' = \{\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3\}$ est une base de E. Préciser la matrice de passage $P = P_{BB'}$ de B à B', ainsi que la matrice inverse P^{-1}.
3. Exprimer $L(\vec{\epsilon}_1), L(\vec{\epsilon}_2), L(\vec{\epsilon}_3)$ dans la base B' et en déduire la matrice $D = L_{B'}$ de L dans la base B'.
4. Quelle relation lie les matrices A, D, P ?
5. Pour tout entier $n \geqslant 1$ exprimer la matrice A^n.